

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕНУЛЕВЫМ КРАЕВЫМ РЕЖИМОМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Спевак Л.Ф., Нефедова О.А.

ИМАШ УрО РАН, д. 34, ул. Комсомольская, г. Екатеринбург, 620034, Российская Федерация, lfs@imach.uran.ru, nefedova@imach.uran.ru

В работе рассмотрена двумерная краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения параболического типа с вырождением [1, 2]

$$u_t = u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2 \quad (1)$$

с краевым условием

$$u|_{\rho=a(\varphi)} = f(t, \varphi). \quad (2)$$

Уравнение $\rho = a(\varphi)$ задает в полярной системе координат замкнутую гладкую линию, содержащую начало координат, $f(0, \varphi) = 0$, $f_t(0, \varphi) > 0$. В литературе задача (1), (2) называется задачей А.Д. Сахарова об инициации тепловой волны [2]. Численные алгоритмы для решения подобных задач в случае одной пространственной переменной разработаны ранее в работах [3, 4]. В работе [5] рассмотрена двумерная задача при краевом условии, задающем движение нулевого фронта тепловой волны. В разработанном в этой работе алгоритме на каждом шаге по времени методом граничных элементов решается краевая задача для уравнения Пуассона в известной области, ограниченной начальными и текущими положениями нулевого фронта. В случае, когда задано краевое условие (2), эта область неизвестна, и предложенный в [5] алгоритм не может быть применен.

Для решения задачи (1), (2) в данной работе разработан алгоритм, основанный на замене местами в уравнении (1), записанном в полярной системе координат,

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{u^2}{\sigma} + \frac{uu_{\rho}}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{u^2}{\sigma} + uu_{\varphi\varphi} \right), \quad (3)$$

искомой функции u и радиальной координаты ρ . В результате на каждом шаге по времени может быть рассмотрена краевая задача для уравнения Пуассона относительно функции ρ в известной области. Решение этой задачи методом граничных элементов на каждом шаге может быть без потери точности преобразовано в решение исходной задачи (1), (2).

Работа выполнена при частичной поддержке Комплексной программы УрО РАН, проект № 15-7-1-17.

Литература

1. Vazquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. – Oxford Press. 2006, 648 p.
2. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика. – М.: Физматлит. 2001, 576 с.
3. Kazakov A. L., Spevak L. F. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 37, iss. 10-11. – P. 6918-6928.
4. Kazakov A. L., Spevak L. F. An analytical and numerical study of a nonlinear parabolic equation with degeneration for the cases of circular and spherical symmetry // Applied Mathematical Modelling. – 2016. – Vol. 40, – iss. 2. – P. 1333-1343.
5. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф., Нефедова О. А. Решение двумерной задачи о движении фронта тепловой волны с использованием степенных рядов и метода граничных элементов // Известия ИГУ. Серия Математика. – 2016. – Т.18. – С. 21-37.