

# ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Привалова В.В. и Просвиряков Е.Ю.

*Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук  
г. Екатеринбург*

**Аннотация.** В данной работе рассмотрены точные решения двумерных нелинейных течений вязкой несжимаемой жидкости. Рассматриваемые решения относятся к классу решений Линя, представляющих собой скорости, линейно зависящие от части координат, что позволяет их использовать для описания крупномасштабных течений Мирового океана. Полученное точное решение описывает течение вертикально завихренной жидкости. Вертикальная закрутка в жидкости возникает из-за учета сил инерции и неоднородного распределения скоростей на свободной границе слоя жидкости. Это решение позволяет описывать противотечения несжимаемой жидкости для течений в тонком слое. Таким образом, полученное точное решение уравнений Навье-Стокса описывает новый механизм переноса импульса в жидкости. В статье проанализированы полученные решения. Показано существование застойных точек для течения вертикальной завихренной жидкости в бесконечном слое с проницаемыми границами.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Запишем уравнение Навье-Стокса для установившегося движения вязкой жидкости и уравнение несжимаемости, спроецированные на оси в прямоугольной декартовой системе координат. Получим следующую стационарную систему нелинейных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right); \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right); \\ V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь в  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  – компоненты вектора скорости;  $P$  – давление, деленное на плотность  $\rho$ ;  $\nu$  – кинематическая вязкость. Точное решение системы (1) ищем в виде:

$$\begin{aligned} V_x(x, y, z) &= U(z), \\ V_y(x, y, z) &= V(z) + xv_1(z), \end{aligned} \quad (2)$$

$$V_z = w.$$

Точные решения (2) описывают течение вертикально завихренной жидкости с проницаемыми границами. Вертикальную компоненту скорости считаем постоянной величиной:  $V_z = w = \text{const} > 0$ . Скорость  $V_z$  характеризует отсос жидкости с границ слоя жидкости. Движение жидкости будем считать изобарическим, т.е. давление является постоянной функцией:

$$P(x, y, z) = P_0. \quad (3)$$

Точные решения (2) обобщают семейство решений для изобарических, градиентных, конвективных крупномасштабных течений вязкой несжимаемой жидкости.

Подставляем решения (2), (3) в систему (1) и проецируем полученные выражения на оси  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , получим систему уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} w \frac{\partial U}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \\ Uv_1 + w \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial z} x \right) &= \nu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} x \right). \end{aligned} \quad (4)$$

С учётом того, что все функции  $U$ ,  $V$ ,  $v_1$  зависят только от координаты  $z$ , обозначим частные производные в уравнениях (4) штрихом. Используя метод неопределенных коэффициентов (линейную независимость функций  $x$  и  $1$ ), выпишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций  $U$ ,  $V$ ,  $v_1$ :

$$\begin{aligned} \nu U'' - wU' &= 0; \\ \nu V'' - wV' - Uv_1 &= 0; \\ \nu v_1'' - wv_1' &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Приведём систему полученных уравнений к безразмерному виду. Для этого выберем следующие масштабные переменные. Горизонтальная координата  $x$  характеризуется масштабом  $l$ , а вертикальная координата характеризуется толщиной слоя жидкости  $h$ . Аналогично вводятся два масштаба для скоростей. В этом случае, для однородных слагаемых гидродинамических полей скоростей соответственно масштабные переменные примут следующий вид:

$$[U], w.$$

Преобразуем второе уравнение системы (5) с учетом выбранных характерных размеров скоростей и координат:

$$\nu V'' \frac{[U]}{h^2} - V' \frac{w[U]}{h} - Uv_1 [U] \frac{[U]}{l} = 0,$$

$$vV'' \frac{1}{h^2} - V' \frac{w}{h} - Uv_1 \frac{[U]}{l} = 0.$$

Преобразуем последнее уравнение, умножив его на число  $\frac{h^2}{v}$ , получим:

$$V'' - wV' \frac{[w]h}{v} - Uv_1 \frac{[U]h^2}{vl} = 0,$$

$$V'' - \text{Re}_w wV' - \delta^2 \text{Re}_U Uv_1 = 0.$$

Здесь  $\text{Re}_U = \frac{[U]l}{v}$  - число Рейнольдса относительно горизонтальной (продольной)

скорости,  $\text{Re}_w = \frac{wh}{v}$  - число Рейнольдса относительно вертикальной (поперечной)

скорости,  $\delta = \frac{h}{l}$  - отношение вертикального и горизонтального характерных размеров.

Аналогично приводим к безразмерному виду остальные два уравнения. В результате система уравнений записывается следующим образом:

$$U'' - \text{Re}_w U' = 0,$$

$$V'' - \text{Re}_w V' - \delta^2 \text{Re}_U Uv_1 = 0, \quad (6)$$

$$v_1'' - \text{Re}_w v_1' = 0.$$

## ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6) имеет вид

$$U = \frac{\exp(\text{Re}_w z) C_1}{\text{Re}_w} + C_2,$$

$$V = \frac{\text{Re}_U \text{Re}_w^2 \delta^2 C_2 C_6}{\text{Re}_w} z + \frac{\exp(2\text{Re}_w z) \text{Re}_U \delta^2 C_1 C_5}{2\text{Re}_w^4} + \frac{\exp(\text{Re}_w z) C_3}{\text{Re}_w} +$$

$$+ \frac{\exp(\text{Re}_w z) \text{Re}_U \delta^2 (C_1 C_6 + C_2 C_5)}{\text{Re}_w^2} \left( z - \frac{1}{\text{Re}_w} \right) + C_4,$$

$$v_1 = \frac{\exp(\text{Re}_w z) C_5}{\text{Re}_w} + C_6,$$

где  $C_i, i = \overline{1,6}$  - константы интегрирования.

Для определения постоянных интегрирования  $c_i$  сформулируем краевую задачу. На нижней границе выполняется условие прилипания, на верхней проницаемой границе заданы скорости в безразмерном виде:

$$\text{при } z = 0 \quad U(0) = V(0) = v_1(0) = 0;$$

$$\text{при } z = 1 \quad U(1) = \cos \alpha, \quad V(1) = \sin \alpha, \quad v_1(1) = \frac{\text{Ta}}{2\text{Re}_U}. \quad (8)$$

Здесь  $Ta = \frac{2\Omega l^2}{\nu}$  – модифицированное число Тейлора,  $\Omega$  – значение вертикальной компоненты завихренности на верхней границе слоя жидкости. Тогда решение (7) системы уравнений (6) с учётом граничных условий (8) имеют вид:

$$U = \frac{1 - \exp(\text{Re}_w z)}{1 - \exp(\text{Re}_w)} \cos \alpha,$$

$$V = \frac{1 - \exp(\text{Re}_w z)}{1 - \exp(\text{Re}_w)} \sin \alpha - \frac{Ta \delta^2 \cos \alpha}{4[1 - \exp(\text{Re}_w)]^3 \text{Re}_w^2} \left\{ \exp(2\text{Re}_w z) [-1 + \exp(\text{Re}_w)] + \right.$$

$$+ \exp(2\text{Re}_w) [1 - \exp(\text{Re}_w z)] + (1 - z)(4\exp(\text{Re}_w + \text{Re}_w z) \text{Re}_w - 2\text{Re}_w) -$$

$$\left. - \exp(\text{Re}_w)(1 + 2\text{Re}_w(2 + z)) + \exp(\text{Re}_w z)(1 + 2\text{Re}_w(1 + 2z)) \right\},$$

(9)

$$v_1 = \frac{Ta}{2\text{Re}_w} \frac{1 - \exp(\text{Re}_w z)}{1 - \exp(\text{Re}_w)}.$$

Исследуем полученные решения. Функции  $U$  и  $v_1$  – монотонные, имеющие ноль при  $z = 0$ . Графики функций  $U(z)$  и  $v_1(z)$  показаны на рисунках 1 и 2.

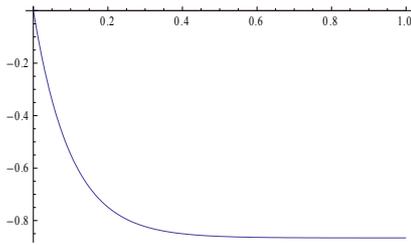


Рис. 1. График функции  $U(z)$

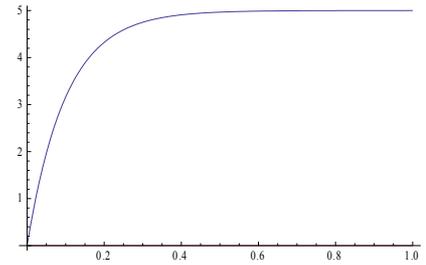


Рис. 2. График функции  $v_1(z)$

Исследуем далее скорость  $V$ . Представим функцию  $V$  в мультипликативном виде:

$$V(z) = z \cdot f(z).$$

Исследуем скорость  $V(z)$  на возможность существования противотечений, т.е. наличие нулей на промежутке  $z \in (0;1)$ . Условием существования таких нулей является выполнение неравенства:

$$f(0) \cdot f(1) < 0.$$

Значения функции  $f$  в точках  $z = 0$  и  $z = 1$  вычисляются по формулам:

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{V(z)}{z} = -\frac{\text{Re}_w \sin \alpha}{1 - \exp(\text{Re}_w)} + \frac{(\exp(2\text{Re}_w) + 4\exp(\text{Re}_w)(1 - \text{Re}_w) - 2\text{Re}_w - 5) Ta \delta^2 \cos \alpha}{4(1 - \exp(\text{Re}_w))^3 \text{Re}_w},$$

$$f(1) = \sin \alpha.$$

На интервале  $z \in (0;1)$  у функции  $V(z)$  существует один ноль. Следовательно, в потоке имеется застойная точка противотечения, что, как показано на рисунке 3, приводит к наличию противотечений в жидкости.

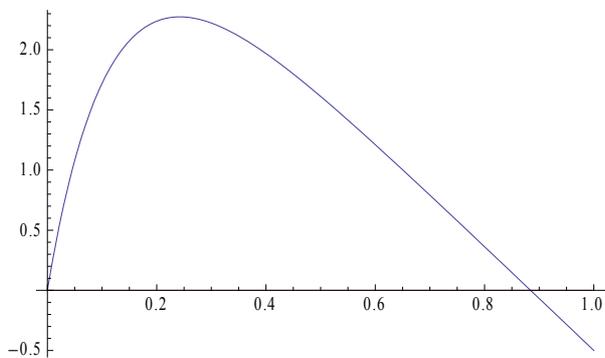


Рис. 3. График функции  $V(z)$

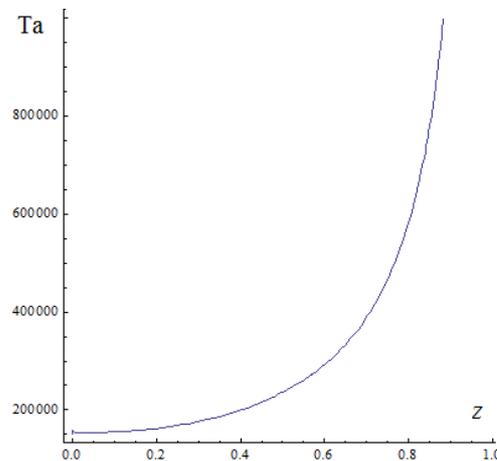


Рис. 4. Локализация корней  $V(z)$  при различных значениях модифицированного числа Тейлора.

На рисунке 4 показана локализация корней функции  $V(z)$  на интервале  $z \in [0; 1]$  при различных значениях модифицированного числа Тейлора  $Ta$ . По физическому смыслу числа Тейлора получаем, что при значительном возрастании центробежных сил по сравнению с силами вязкого трения, решение  $V(z)$  будет локализоваться вблизи верхней границы.

Линии тока горизонтальных скоростей изображены на рисунке 5. Продемонстрировано распределение противотечения в горизонтальном направлении, зависящего от поперечной скорости.

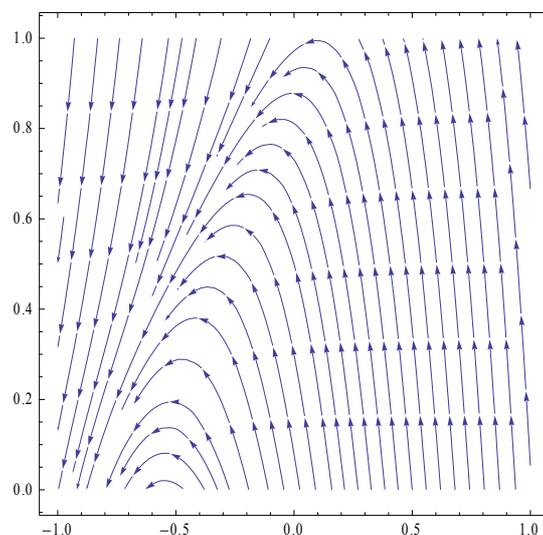


Рис. 5. Линии тока

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье получено обобщение установившегося классического решения Куэтта для двумерных нелинейных вязких несжимаемых жидкостей. Показано существование застойных точек у гидродинамических полей при определенных ограничениях на физические постоянные и граничные условия. Посредством методов локализации корней у полиномиальных решений изучены качественные и количественные свойства полученных точных решений в классе линейно растущих скоростей по горизонтальным координатам.