



Д.А. Паршин

# ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИМ СОСТОЯНИЕМ ПОКРЫТИЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ИХ АДДИТИВНОМ ФОРМИРОВАНИИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ И ДЕТАЛЕЙ МАШИН\*

\*Работа выполнена в рамках госзадания АААА-А20-120011690132-4

## Схемы моделируемого процесса аддитивного нанесения покрытия



- изучается квазистатический процесс развития напряжений в покрытии
- рассматриваются малые деформации материала наносимого покрытия
- в наносимых монослоях материала возникают ненулевые *начальные напряжения*, на значения которых возможно влиять в ходе процесса

## Принимаемые в модели предположения

малая относительная толщина последовательно наносимых <i>монослоев</i> материала	⇒	используется модель деформируемого твердого тела, <i>непрерывно растущего</i> по всей боковой поверхности
медленное и плавное вращение подложки в процессе нанесения	⇒	радиальные и тангенциальные силы инерции вращения не учитываются
жесткость подложки значительно превышает жесткость покрытия	⇒	деформация подложки в моделируемом процессе в расчет не берется
рассматривается тело, достаточно протяженное в осевом направлении	⇒	изучается плоское деформированное состояние получаемого слоя покрытия
отсутствует возможность перераспределения напряжений в теле за счет реологических механизмов деформирования	⇒	строится модель упругого поведения растущего покрытия (но именно в этом случае эффекты, связанные с ростом, будут проявляться <i>наиболее характерно!</i> )

## Основные соотношения квазистатики растущего слоя покрытия

- В процессе роста НДС в каждой точке формируемого слоя меняется со временем - несмотря на отсутствие реологических свойств у материала

$V_\rho = V(\rho, t)$ ,  $V_\varphi \equiv V_z \equiv 0$  - компоненты поля скоростей деформирования ( $\rho, \varphi, z$  - радиальная, окружная и продольная координаты;  $t$  - время)

Обозначения производных:  $(\cdot)' = \frac{\partial}{\partial \rho}(\cdot)$ ,  $(\dot{\cdot}) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot)$

$$\mathbf{D} \leftrightarrow \begin{pmatrix} D_\rho & 0 & 0 \\ 0 & D_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_\rho = V', \quad D_\varphi = \frac{V}{\rho} \quad \text{- компоненты тензора скоростей деформации}$$

В соответствии с законом Гука  $\dot{\mathbf{T}}/G = 2\mathbf{D} + (\kappa - 1)(\text{tr } \mathbf{D})\mathbf{1}$  имеем:

$$\dot{\mathbf{T}} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_\rho & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\sigma}_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\sigma}_z \end{pmatrix}, \quad \dot{\sigma}_{\{\rho\}}/G = (\kappa + 1)D_{\{\rho\}} + (\kappa - 1)D_{\{\varphi\}}, \quad \dot{\sigma}_z = \nu(\dot{\sigma}_\rho + \dot{\sigma}_\varphi)$$

- компоненты тензора скоростей напряжений,

$G$  - модуль сдвига,  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $\kappa = \frac{1}{1 - 2\nu}$

Уравнение равновесия  $\nabla \cdot \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dot{\sigma}'_\rho + \frac{\dot{\sigma}_\rho - \dot{\sigma}_\varphi}{\rho} = 0$

Одна поверхность  $\rho = x_0$  формируемого слоя *сцеплена* с жесткой подложкой  $\Rightarrow V(x_0, t) \equiv 0$

На другой поверхности слоя (*поверхности роста*)  $\rho = x(t)$  известны *начальные напряжения*:  $\begin{cases} \sigma_\rho(\rho, \tau_*(\rho)) \equiv 0 \\ \sigma_\varphi(\rho, \tau_*(\rho)) \equiv \sigma_\varphi^*(\rho) \end{cases}$

где  $t = \tau_*(\rho)$  - момент присоединения *монослоя* радиуса  $\rho$

## Постановки решенных в работе задач управления

**ЗАДАЧА 1:** Найти закон изменения начальных напряжений в материале, обеспечивающий требуемое изменение во времени *контактного давления* формируемого слоя покрытия на рабочую поверхность подложки.

**ЗАДАЧА 2:** Найти закон изменения начальных напряжений в материале, обеспечивающий требуемое распределение *окружных напряжений* в сформированном слое покрытия заданной толщины, сцепленном с подложкой, на поверхности которой он был сформирован.

**ЗАДАЧА 3:** Найти закон изменения начальных напряжений в материале, обеспечивающий требуемое распределение *остаточных окружных напряжений* в сформированном слое покрытия заданной толщины после возможного отсоединения от него подложки.

## Пример: Решение 2-й задачи управления

Считаем, что сформирован слой толщины  $x_1 - x_0$ , где  $x_1$  - финальное значение радиуса поверхности роста покрытия.

После решения *неклассической начально-краевой задачи* механики для растущего слоя покрытия приходим к следующему разрешающему ЗАДАЧУ 2 *интегральному уравнению*:

$$\sigma_\varphi^*(\bar{\rho}) - \left( \kappa - \frac{1}{\bar{\rho}^2} \right) \int_{\bar{\rho}}^{\bar{x}_1} \frac{\sigma_\varphi^*(\bar{\xi}) \bar{\xi} d\bar{\xi}}{1 + \kappa \bar{\xi}^2} = \sigma_\varphi(\bar{\rho}, \bar{x}_1) \quad \begin{cases} \sigma_\varphi^*(\bar{\rho}) & \text{- искомая функция} \\ \sigma_\varphi(\bar{\rho}, \bar{x}_1) & \text{- желаемое распределение (известная функция)} \end{cases}$$

Здесь течение процесса роста характеризуем текущим значением радиуса  $x$  поверхности роста и используется *безразмерная координата*  $(\bar{\cdot}) = (\cdot) / x_0$

Осуществляем преобразование радиальной координаты:

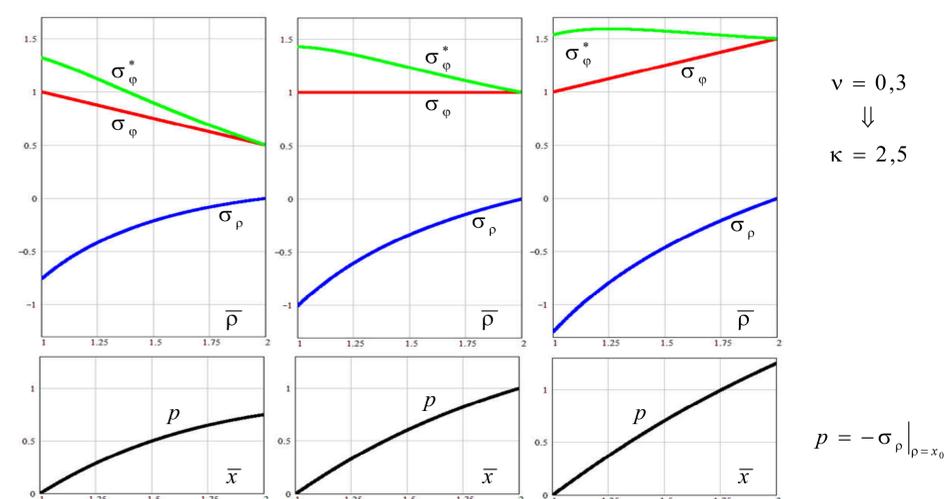
$$y = \ln(1 + \kappa \bar{\rho}^2) \equiv \Psi(\bar{\rho}), \quad \bar{\rho} = \sqrt{\frac{e^y - 1}{\kappa}} \equiv \Psi^{-1}(y)$$

Вводим обозначения:  $a = \Psi(1), \quad b = \Psi(\bar{x}_1)$

$$f(y) = \sigma_\varphi^*(\Psi^{-1}(y)), \quad g(y) = \sigma_\varphi(\Psi^{-1}(y), \bar{x}_1), \quad A(y) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{1 - e^y} \right)$$

После этого интегральное уравнение может быть сведено к задаче Коши, решая которую, находим:

$$f(y) = g(y) + \frac{e^y - 2}{2e^y \sqrt{e^y - 1}} \int_y^b \frac{g(\eta) e^\eta}{\sqrt{e^\eta - 1}} d\eta$$



Учет технологических напряжений актуален при анализе прочности, предсказании коробления и отслоения покрытий как непосредственно в процессе их нанесения, так и при эксплуатации готового изделия. Результаты выполненного моделирования позволяют сделать ряд практически важных заключений. В частности, невозможно обеспечить внутреннее контактное напряжение, прижимающее формируемый слой покрытия к подложке, если начальные окружные напряжения в материале не будут сжимающими; величина начального напряжения, которое должно возникнуть в текущем присоединяемом к формируемому покрытию монослое материала, определяется только величинами получаемых в итоге технологических окружных напряжений, которые будут действовать в готовом изделии в монослоях, присоединенных уже после данного.

Manzhirov A.V. (2018) Some problems in mechanics of growing solids with applications to AM technologies // Journal of Physics: Conference Series, 991. 012056.

Manzhirov A.V., Parshin D.A. (2019) Mechanical modeling additive processes of rotational molding in case of viscoelastic behavior of the being manufactured articles // AIP Conference Proceedings, 2116. 380014.

Parshin D.A. (2020) Mathematical modelling of the process of internal technological stress fields development in cylindrical solids being layer-by-layer made of ageing viscoelastic materials // Journal of Physics: Conference Series, 1479. 012145.