

На правах рукописи



БАХАРЕВА ЕЛЕНА АЛЕКСАНДРОВНА

**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ НЕСУЩЕЙ
СПОСОБНОСТИ БАЛОК ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ
С УЧЕТОМ РАЗУПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА**

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Екатеринбург – 2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки
Институте машиноведения Уральского отделения Российской академии наук

Научный руководитель: Стружанов Валерий Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: Федотов Владимир Петрович
доктор технических наук, профессор, ФГБУН
Институт машиноведения Уральского отделения
Российской академии наук, главный научный
сотрудник

Башуров Вячеслав Владимирович
кандидат физико-математических наук, ФГБОУ
ВПО "Уральский государственный университет
путей сообщения", доцент кафедры Высшая и
прикладная математика

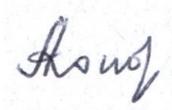
Ведущая организация: ФГАОУ ВПО "Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б.Н. Ельцина"

Защита состоится 28 ноября 2013 г. в 14.00 часов на заседании диссертаци-
онного совета Д 004.023.01 при Федеральном государственном бюджетном
учреждении науки Институте машиноведения Уральского отделения РАН по ад-
ресу: 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государ-
ственного бюджетного учреждения науки Института машиноведения Уральского
отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан " " октября 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор технических наук, профессор



А.В. Коновалов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Одним из основных направлений технического прогресса в машиностроении и строительстве является повышение прочности, надежности и живучести элементов конструкций. Это достигается как использованием новых материалов, так и включением в практику проектирования свойств конструкционных материалов, ранее не принимаемых во внимание. Обычно расчет конструкций на прочность проводится по допускаемым напряжениям, за которые, как правило, принимаются напряжения, отвечающие пределу прочности материала, что приводит к неоправданно высоким запасам прочности, увеличению материалоемкости изделий и, как следствие, занижению величины предельной нагрузки. Одним из возможных подходов, позволяющих увеличить точность расчетов, является учет стадии разупрочнения материала, которая начинается после достижения напряжениями предела прочности и характеризуется тем, что при росте деформаций напряжения падают.

В экспериментальных и теоретических работах российских и зарубежных ученых, среди которых С.Д. Волков, И.С. Воронюк, В.А. Ибрагимов, Ю.В. Кадашев, Д.В. Ключников, В.В. Новожилов, А.А. Лебедев, Н.Г. Чаусов, Л.В. Никитин, Е.И. Рыжак, В.В. Стружанов, В.П. Радченко, В.Э. Вильдеман, Z.P. Važant, J. Vobiński, M. Brocca, D.C. Drucker, R.H. Evans, E. Smith, R.Y. Xiao и другие была установлена принципиальная возможность экспериментального построения полной диаграммы деформирования с падающей до нуля ветвью, характеризующей разупрочнение материала, и установлен, по крайней мере, на качественном уровне эффект от включения в рассмотрение критической стадии деформирования (разупрочнения), заключающийся в уточнении значения предельной несущей способности и напряженно-деформированного состояния, предшествующего разрушению. Однако общая теория, позволяющая прогнозировать расчеты элементов конструкций с учетом разупрочнения еще не построена. Данное обстоятельство определяется тем, что деформирование материала при разупрочнении является неустойчивым, и поэтому краевые задачи механики деформируемого твердого тела, учитывающие критическую стадию деформирования материала, не удовлетворяют условиям корректности Адамара, то есть они могут иметь несколько решений, в том числе и неустойчивых. Отсюда актуальным является решение конкретных задач для простых механических систем, которые могут стать, в том числе, модельными примерами для общей теории и установить связи между теорией и практикой. Такие примеры позволят наглядно продемонстрировать подходы и методы решения задач механики деформируемого твердого тела с учетом разупрочнения материала и исследовать эффекты, скрытые при общем рассмотрении. Кроме того, построенные методы и алгоритмы уже на данном этапе исследования проблемы разупрочнения могут быть включены в практику проектирования.

Целью диссертационной работы является разработка методов прогнозирования напряженного состояния и реального предельного изгибающего момента при чистом изгибе балочных элементов конструкций с поперечным сечением,

симметричным относительно вертикальной оси, из материалов, обладающих эффектом деформационного разупрочнения.

Для достижения указанной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Исследовать устойчивость процесса деформирования балок и сформулировать критерии потери устойчивости.
2. Развить эффективные математические численные методы расчета параметров всех положений равновесия, в том числе и неустойчивых, в применении к рассматриваемой механической системе.
3. Создать и реализовать на конкретных примерах методику прогнозирования предельной несущей способности балок при чистом изгибе на основе результатов исследования устойчивости.

Научная новизна заключается в следующем:

1. Получены критерии потери устойчивости процесса активного деформирования балок с произвольными сечениями, симметричными относительно вертикальной оси, с учетом деформационного разупрочнения материала с помощью аппарата современной математической теории катастроф.
2. Предложена оригинальная схема метода упругих решений и установлено, что начало расходимости итерационного процесса отвечает моменту потери устойчивости чистого изгиба балок.
3. Получены критерии потери устойчивости чистого изгиба балок из упругопластических, упругохрупких и частично пластических разупрочняющихся материалов в результате применения метода исследования устойчивости по линейному приближению.
4. Впервые применен метод Ньютона-Канторовича для расчета параметров устойчивых и неустойчивых равновесий рассматриваемых балок из разупрочняющихся материалов при активном мягком нагружении. Предложена оригинальная численная процедура выбора начального приближения в итерационной схеме Ньютона-Канторовича.

Теоретическая значимость исследований обоснована тем, что доказана связь разрушения балок из упругопластических и упругохрупких разупрочняющихся материалов с моментом потери устойчивости процесса чистого изгиба, который определяется методами теории катастроф и совпадает с началом расходимости последовательных приближений в методе простых итераций (модифицированная схема метода упругих решений), что вносит вклад в расширение представлений о разрушении балочных элементов конструкций.

Практическая значимость работы. Разработана методика расчета предельной несущей способности балок, изготовленных из разупрочняющихся материалов и подверженных чистому изгибу, позволяющая прогнозировать начало разрушения в процессе деформирования. Методика может быть использована в качестве руководства и практического пособия для расчета истинной несущей способности балок, материал которых обладает эффектом деформационного разупрочнения в процессе деформирования, при чистом изгибе.

Предложенные методы могут быть использованы для дальнейшего развития теории разупрочняющихся материалов и разработки методов расчета различных

конструкций, которые вследствие учета разупрочнения позволяют полностью использовать ресурс материала.

Результаты исследований внедрены в учебный процесс и составляют содержание некоторых разделов спецкурса «Устойчивость деформируемых тел из разупрочняющихся материалов» магистерской программы «Механика деформируемого твердого тела», направление 010800 – Механика и математическое моделирование в Институте математики и компьютерных наук Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина.

Исследования, представленные в диссертационной работе, выполнялись при поддержке грантов РФФИ (проекты 10-08-00135, 10-01-96018-р_Урал_а, 13-08-00186) и молодежного научного проекта Президиума УрО РАН № 11-1-НП-532.

Методология и методы исследований. При проведении исследований использовался аппарат математической теории катастроф, теории особенностей дифференцируемых отображений, функционального анализа и механики деформируемого твердого тела. Методологическую основу диссертационной работы составляют труды научного руководителя д.ф.-м.н., профессора В.В. Стружанова.

Положения, выносимые на защиту:

1. Итерационные методы расчета параметров всех равновесий балок произвольного поперечного сечения, симметричного относительно вертикальной оси, из упругопластических и упругохрупких разупрочняющихся материалов под действием чистого изгиба (мягкий и жесткий типы нагружения).
2. Методы исследования устойчивости процесса деформирования рассматриваемой механической системы.
3. Методика расчета предельной несущей способности (предельного изгибающего момента) балки произвольного сечения, симметричного относительно вертикальной оси, из разупрочняющегося материала под действием чистого изгиба.
4. Результаты численных экспериментов по определению предельной несущей способности балок с произвольными сечениями из разупрочняющихся материалов при чистом изгибе и сравнение результатов расчетов с традиционными методиками.

Достоверность и обоснованность научных результатов обеспечивается строгой математической постановкой задачи, использующей минимальное число допущений, корректным применением при ее решении математического аппарата и законов механики деформируемого твердого тела, а также проведением тестовых расчетов.

Установлено качественное совпадение результатов, полученных в работе, с результатами, представленными в публикациях других исследователей по растяжению стержневых систем с разупрочняющимися элементами и кручению круглых стержней из разупрочняющегося материала. Результаты расчетов напряженного состояния балок при чистом изгибе по приведенным в диссертации методам при учете только упрочнения материала полностью совпадают с результатами расчетов С.П. Тимошенко по теории неупругого изгиба.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Всероссийских школах-конференциях молодых ученых «Математическое моделирование в естественных науках» (г. Пермь, 2008-2011), Всероссийских конфе-

ренциях с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2009, 2010, 2011, 2013), Всероссийских Зимних школах по механике сплошных сред (г. Пермь, 2009, 2011, 2013), IV и V Всероссийских научно-технических конференциях «Ресурс и диагностика материалов и конструкций» (г. Екатеринбург, 2009, 2011), VI Всероссийской конференции «Механика микронеоднородных материалов и разрушение» (г. Екатеринбург, 2010), Всероссийской конференции «Безопасность критичных инфраструктур и территорий» (г. Екатеринбург, 2009, 2011, 2012), VI Международной научной конференции «Прочность и разрушение материалов и конструкций» (г. Оренбург, 2010), 2-й Всероссийской конференции «Проблемы оптимального проектирования сооружений» (г. Новосибирск, 2011), Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика» (Новосибирск, 2011), X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Нижний Новгород, 2011), XV Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (г. Ростов-на-Дону, 2011), Международной научной конференции по механике «Шестые Поляховские чтения» (г. Санкт-Петербург, 2012), XI молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения» (г. Казань, 2012), XX Петербургских чтениях по проблемам прочности (г. Санкт-Петербург, 2012), XI Казанской летней школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (г. Казань, 2012), Международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» (г. Тула, 2013), VII Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (г. Ростов-на-Дону, 2013), Third International Conference on Mathematical Physics and Its Applications (Samara, Russia, 2012), International Conference «Mathematical and Informational Technologies, MIT-2013» (X Conference «Computational and Informational Technologies for Science, Engineering and Education») (Vrnjacka Banja, Serbia, Budva, Montenegro, 2013).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 30 печатных и электронных работ, из которых 5 статей в журналах из перечня ВАК и 3 работы в рецензируемых источниках.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, включающего 165 источников, и приложения. Работа составляет 139 страниц, содержит 39 рисунков и 3 таблицы.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования и приводится общая характеристика работы, практическая и теоретическая значимость, формируются цели диссертации, описываются результаты, выносимые на защиту.

Первая глава посвящена анализу научных публикаций по основным проблемам механики разупрочняющихся тел. Приведен обзор существующих экспериментальных методик построения полных диаграмм деформирования и некоторых теоретических моделей, описывающих явление разупрочнения материала. Рассмотрены методы расчета предельной несущей способности элементов кон-

струкций, применяемые в инженерной практике, и обоснована необходимость учета в расчетах закритической стадии деформирования для определения истинных параметров прочности. На основе литературного обзора сформулированы цели и задачи диссертационной работы.

Во **второй главе** рассмотрена балка прямоугольного поперечного сечения длины L с высотой $2h$ и шириной b , подвергнутая чистому изгибу (рисунок 1). Деформирование осуществляется квазистатически и изотермически посредством приложения изгибающего момента (мягкое нагружение), либо задания кривизны (жесткое нагружение). Предполагается, что полная диаграмма при сжатии симметрична полной диаграмме деформирования при растяжении (рисунок 2). Поэтому в прямоугольной балке нейтральная плоскость совпадает с плоскостью симметрии Oxz . В силу принципа плоских сечений деформация линейна и равна $\varepsilon = \kappa \cdot y$, где κ – кривизна балки. На рисунке 2 обозначены ε^B – деформация предела прочности и ε^Z – деформация разрушения. Использована классификация материалов по типу диссипации энергии (В.В. Стружанов):

– упругопластические материалы (диссипация происходит за счет пластической деформации), которые описываются соотношениями:

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p), \quad \varepsilon^p = \varepsilon - \frac{1}{E} \int_0^\varepsilon E^p d\varepsilon, \quad \left(E^p = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right) \quad (1)$$

где ε^p – пластическая деформация, E^p – касательный модуль, E – модуль Юнга.

– Упругохрупкие материалы (диссипация за счет континуального разрушения):

$$\sigma = E^s \varepsilon = E(1 - \omega)\varepsilon, \quad \omega = 1 - E^s / E, \quad (2)$$

E^s – секущий модуль, ω – параметр, характеризующий поврежденность материала.

– Партипластические (частично пластические) материалы, в которых проявляются оба вида диссипации:

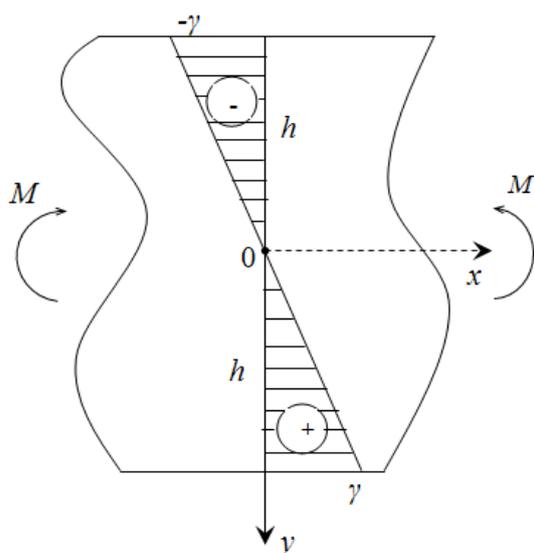


Рисунок 1 – Распределение продольных деформаций

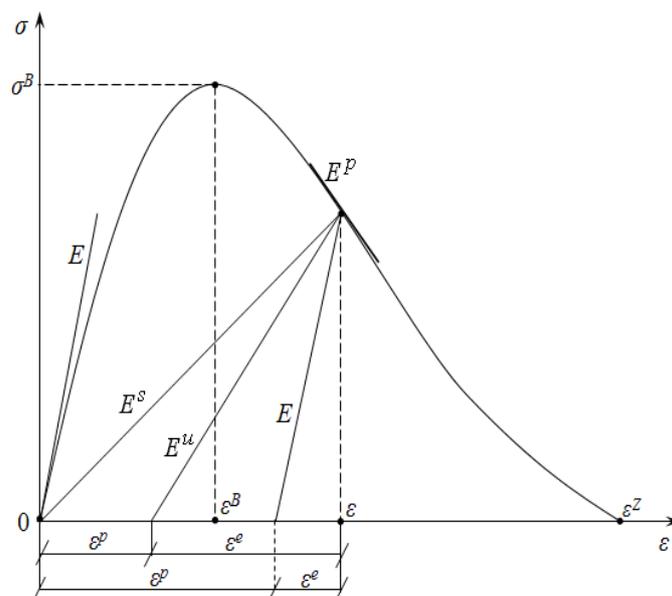


Рисунок 2 – Полная диаграмма растяжения и модули разгрузки для различных материалов

$$\sigma = E^u (\varepsilon - \varepsilon^p) = E(1 - \omega)(\varepsilon - \varepsilon^p), \quad \varepsilon^p = \varepsilon - \int_0^\varepsilon \frac{E^p}{E^u} d\varepsilon, \quad \omega = 1 - \frac{E^u}{E}, \quad (3)$$

где E^u – модуль разгрузки (см. рисунок 2).

Уравнения равновесия балки имеют вид

$$b \int_{-h}^h \sigma(\kappa y) dy = 0, \quad b \int_{-h}^h \sigma(\kappa y) y dy = 2b \int_0^h \sigma(\kappa y) y dy = M. \quad (4)$$

Первое равенство удовлетворяется тождественно в силу нечетности функции $\sigma(y)$, а второе можно переписать в виде операторного уравнения $\Phi(\kappa, M) = 0$, для решения которого применяется итерационная схема Ньютона-Канторовича:

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n - [\Phi_{,\kappa}(\kappa_n, M)]^{-1} \Phi(\kappa_n, M).$$

Здесь $\Phi_{,\kappa} = 2bJ^p = 2b \int_0^h E^p(\kappa y) y^2 dy$ (запятой обозначена производная), где J^p – мгновенная изгибная жесткость балки. Так как диаграмма $\sigma(\varepsilon)$ имеет ниспадающую ветвь, то уравнение равновесия может иметь несколько решений. Поэтому при применении данного подхода определяются несколько начальных приближений κ_0 . Для этого необходимо, чтобы точка κ_0 принадлежала отрезку, где выполняются следующие условия: функция Φ и её производные $\Phi_{,\kappa}$ и $\Phi_{,\kappa\kappa}$ непрерывны; значения функции Φ на концах отрезка имеют разные знаки; обе производные внутри отрезка сохраняют знак. При этом начальное приближение κ_0 должно удовлетворять неравенству $\Phi(\kappa_0, M) \Phi_{,\kappa\kappa}(\kappa_0, M) > 0$. Методика проиллюстрирована на примере расчета прямоугольной стальной балки высотой $2h = 100$ мм и шириной $b = 50$ мм. Свойства материала определяются зависимостью напряжений от деформаций в виде $\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon \exp(-\varepsilon/\varepsilon^B)$, где $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\varepsilon^B = 0,01$.

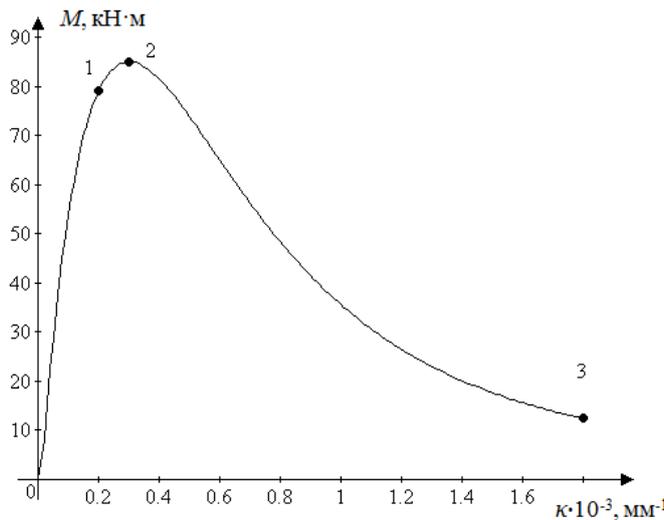


Рисунок 3 – Диаграмма чистого изгиба прямоугольной балки

Считаем, что материал разрушен, при $\varepsilon \geq \varepsilon^Z = 0,09$. Рассчитанная диаграмма $M(\kappa)$ показана на рисунке 3, где точка 1 отвечает началу разупрочнения материала в наиболее растянутых-сжатых областях балки. В точке 2 метод Ньютона-Канторовича не реализуем, поэтому ее координаты определяются из условия максимума функции $f(\kappa) = 2b \int_0^h \sigma(\kappa y) y dy$. В точке 3 (рисунок 3) деформации достигают деформации разрушения ε^Z , и дальнейшее исследование балки становится невозможным.

Для построения зависимости изгибающего момента от кривизны балки также применен метод простых итераций. В случае изгиба балки из партияласти-

ческого разупрочняющегося материала, используя соотношения (3), второе уравнение (4) записывается в виде

$$\kappa J^u - M^\Phi = M, \quad (5)$$

где $J^u = 2b \int_0^h E^u(\kappa y) y^2 dy$, $M^\Phi = 2b \int_0^h E^u(\kappa y) \varepsilon^p(\kappa y) y dy$ – изгибная жесткость и фиктивный изгибающий момент балки с модулями E^u . Уравнение (5) есть операторное уравнение $\kappa = A\kappa$ с нелинейным оператором $A\kappa = U(\kappa) + V(\kappa)$, $U(\kappa) = M^\Phi / J^u(\kappa)$, $V(\kappa) = M / J^u(\kappa)$, где V – это кривизна упругой неоднородной балки с жесткостью J^u , возникающая под действием момента M , а U – кривизна такой же балки при воздействии фиктивного момента M^Φ . Уравнение решается методом простых итераций $\kappa_{n+1} = A\kappa_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Приближения сходятся к решению, если на каждом итерационном шаге оператор A является сжимающим, то есть удовлетворяет условию Липшица $\|A\kappa' - A\kappa''\| \leq q \|\kappa' - \kappa''\|$ с константой $q = \sup_{\kappa} \|A_{,\kappa}\| < 1$ (q – коэффициент сжатия), где $A_{,\kappa} = 1 - 2bJ^p / J^u$. Величина $J^u > 0$

по определению, тогда $q < 1$, если $J^p > 0$. Если на каждом шаге $J^p > 0$, то итерационный процесс сходится. Аналогичные алгоритмы построены для расчета параметров равновесий балок из упругопластических и упругохрупких разупрочняющихся материалов, описываемых соотношениями (1) и (2) соответственно. Из анализа сходимости методов установлено, что, используя метод простых итераций для расчета параметров равновесий балки при мягком нагружении, возможно получить только восходящую ветвь диаграммы $M \sim \kappa$ (рисунок 3). При жестком нагружении, когда задается величина кривизны κ , уравнение (5) определяет изгибающий момент как однозначную функцию $f(\kappa) = \kappa J^u(\kappa) - M^\Phi(\kappa)$, которая полностью описывает диаграмму $M \sim \kappa$ (рисунок 3).

Приведенная схема простой итерации в данной задаче может быть интерпретирована следующим образом. Сначала рассматривается балка из партипластического материала. Формулируются две задачи, а именно, основная задача (A) – определение напряжений и деформаций в упругой балке с модулями E^u под действием заданного изгибающего момента M , и корректирующая задача (B) – определение остаточных напряжений в балке, свободной от внешней нагрузки, при заданном распределении пластических деформаций ε^p . Их решения соответственно находятся в виде

$$\kappa' = \frac{M}{J^u}, \quad \varepsilon' = \kappa' y, \quad \sigma' = E^u(\kappa y) \varepsilon' \quad (6)$$

и

$$\kappa'' = \frac{M^\Phi}{J^u}, \quad \varepsilon'' = \kappa'' y, \quad \sigma'' = E^u(\kappa y) (\varepsilon' - \varepsilon^p). \quad (7)$$

Итерационная процедура заключается в последовательном решении основной и ряда корректирующих задач. На каждом этапе решения пересчитываются параметры балки. Пусть при изгибающем моменте M_0 балка имеет кривизну κ_0 и

находится в равновесии, параметры которого E_0^u , σ_0 , ε_0 , ε_0^p . Увеличим изгибающий момент на величину M_Δ . Параметры возмущения из формул (6) равны

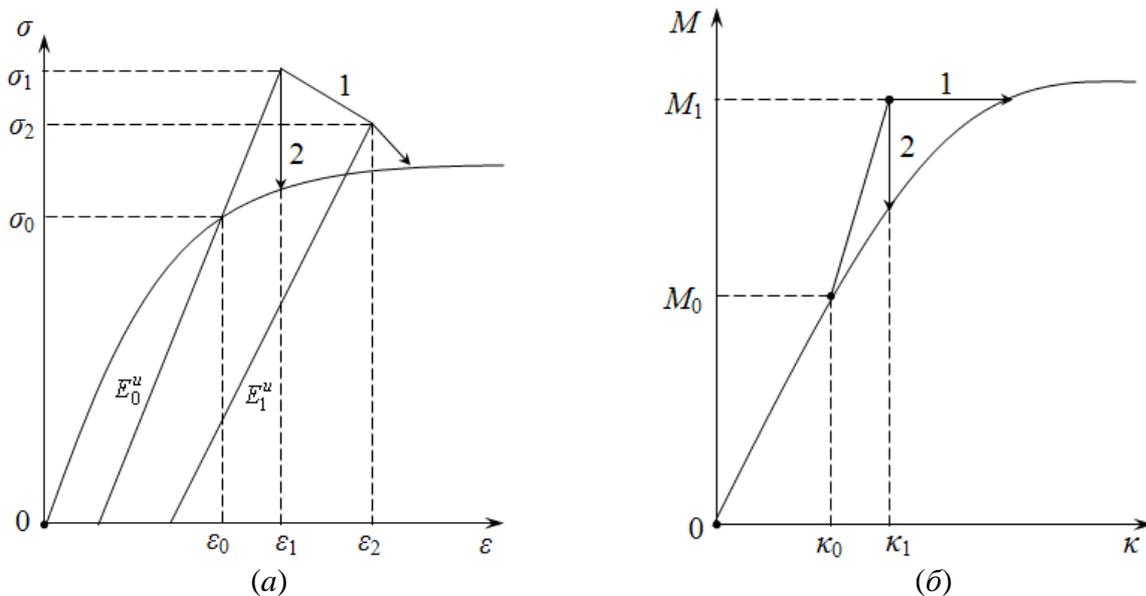
$$\kappa'_\Delta = \frac{M_\Delta}{J_0^u}, \quad \varepsilon'_\Delta = \kappa'_\Delta y, \quad \sigma'_\Delta = E_0^u \varepsilon'_\Delta.$$

Тогда параметры балки в возмущенном состоянии определяются в виде $\kappa_1 = \kappa_0 + \kappa'_\Delta$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \varepsilon'_\Delta = \kappa_1 y$, $\sigma_1 = \sigma_0 + \sigma'_\Delta$, где $M = M_0 + M_\Delta$. Данные величины соответствуют равновесному состоянию при неизменившихся значениях E_0^u и ε_0^p . Однако величины модулей и пластических деформаций должны поменяться и отвечать деформации ε_1 в соответствии с полной диаграммой деформирования. Поэтому модули станут равными E_1^u , а пластические деформации достигнут величины ε_1^p , определяемой по формуле (3), в которой $E^u = E_1^u$, $\varepsilon = \varepsilon_1$.

Таким образом, найденное равновесие нарушается, и балка под действием момента M должна перейти в другое равновесное состояние, параметры которого являются суммой решений задач (A) и (B) для балки с параметрами E_1^u и ε_1^p . Подставляя в формулы (6) и (7) новые значения $J_1^u = J^u(\kappa_1)$ и $M_1^\Phi = M^\Phi(\kappa_1)$, находится решение основной и корректирующей задач, сумма которых считается первым приближением к параметрам искомого равновесного состояния. Процесс повторяется необходимое число раз. Схематически процедура показана на рисунке 4 (a) для элемента материала и на рисунке 4 (б) для балки в целом.

В результате исследования сходимости установлено, что данная итерационная процедура начинает расходиться, когда $J^p = 0$.

При жестком нагружении напряженно-деформированное состояние балки можно представить суммой решений задач (C) и (D). Задача (C) связана с нахождением напряжений и деформаций в упругой балке при заданной кривизне κ .



Прямая 1 – мягкое догружение, прямая 2 – жесткое догружение

Рисунок 4 – Схема итерационных процессов: (a) – для элемента материала; (б) – для балки

Ее решение дают выражения

$$\varepsilon = \kappa y, \quad \sigma' = E^u \varepsilon, \quad M' = J^u \kappa.$$

Задача (D) – это задача об определении напряжений при известных остаточных деформациях и нулевой кривизне. Ее решение имеет вид

$$\kappa = 0, \quad e = 0, \quad \sigma'' = -E^u \varepsilon^p, \quad M'' = -M^\Phi.$$

Итерационная процедура ее решения аналогичная рассмотренному случаю об изгибе балки посредством приложения изгибающего момента. Схематически процедура показана на рисунках 4 (прямые 2). Используя этот итерационный процесс при постепенном возрастании величины κ , наряду с восходящей ветвью диаграммы $M \sim \kappa$ можно получить и нисходящую ветвь (см. рисунок 3).

Для упругопластического и упругохрупкого материалов итерационные процессы строятся аналогично. Приведенная методика определяет механический смысл схемы простой итерации, примененной в данной задаче, и является одним из возможных вариантов метода упругих решений.

В заключительной части второй главы проведено исследование устойчивости процесса нагружения балки. Сначала применяется подход математической теории катастроф. Считая изгибающий момент параметром управления, а кривизну κ балки параметром состояния, выражение для полной энергии при активном деформировании имеет вид

$$W(M, \kappa) = 2bL \int_0^h A(\kappa y) dy - L \int_0^\kappa M d\kappa,$$

где первое слагаемое – работа напряжений, затраченная на деформирование всей балки, $A = \int_0^\varepsilon \sigma(e) de$ – потенциал напряжений, второе слагаемое – работа изгибающего момента. Критические точки функции W определяет уравнение $W_{,\kappa} = 0$. Вырожденные критические точки, в которых скачкообразно происходит смена типа равновесия с устойчивого на неустойчивое, в силу принципа максимального промедления, определяются из решения уравнений $W_{,\kappa} = 0$, $W_{,\kappa\kappa} = 0$. Процесс деформирования балки теряет устойчивость, когда $J^p = 0$.

Также анализ устойчивости балок из пластичных и хрупких разупрочняющихся материалов проводится посредством метода исследования устойчивости по линейному приближению. Например, для балки из партипластического материала, свойства которого описываются соотношениями (3), уравнение возмущенного равновесия имеет вид

$$\kappa' = \frac{M'}{J^u(\kappa')} + \frac{M^\Phi(\kappa')}{J^u(\kappa')}, \quad (8)$$

где $\kappa' = \kappa_0 + d\kappa$, $M' = M_0 + dM$ – параметры возмущенного равновесия, κ_0 , M_0 , $E_0^p = E^p(\kappa_0 y)$, $E_0^u = E^u(\kappa_0 y)$ – параметры данного равновесия балки, $dM > 0$ – приложенный изгибающий момент. В соотношении (8) раскладываются в ряд Тейлора функция $E^u(\kappa')$ и интеграл от переменного верхнего предела κ' в последнем слагаемом выражения

$$M^{\Phi}(\kappa') = 2b \int_0^h E^u(\kappa' y) (\kappa_0 + d\kappa) y^2 dy - 2b \int_0^h \left[\int_0^{\kappa_0 y} E^p de + \int_{\kappa_0 y}^{\kappa' y} E^p de \right] y dy$$

и используются члены до второго порядка малости. Уравнение линейного приближения имеет вид $2bJ_0^p d\kappa = dM$. Если $J_0^p = 0$, равновесие балки неустойчиво (задача некорректна по Адамару). Для упругопластического и упругохрупкого материалов исследование устойчивости по линейному приближению проводится аналогично.

Исследование устойчивости процесса деформирования показало, что условие начала расходимости последовательных приближений в методе простых итераций совпадает с условием потери устойчивости.

Когда возмущение равновесия балки происходит посредством задания малого приращения кривизны (жесткое догружение), то равенство $2bJ_0^p d\kappa = dM$ однозначно определяет величину dM . Равновесие нарушается, если $J_0^p = -\infty$, то есть диаграмма деформирования материала имеет вертикальную падающую ветвь (неустраняемая неустойчивость материала).

В **третьей** главе рассматривается чистый изгиб балок длины L с произвольным поперечным сечением, симметричным относительно вертикальной оси (рисунок 5), например двутавровых, круглых, прямоугольных и др. Граничный контур задан функцией $\Gamma(y)$. Расстояние между верхними и нижними волокнами балки равно $2h$. Аналогично второй главе свойства материала определяет полная диаграмма растяжения-сжатия (см. рисунок 2). В данном случае нейтральная плоскость, где нулевые напряжения и деформации, отклоняется на величину a от плоскости симметрии Oxz (рисунок 6). Полные деформации вычисляются по формуле $\varepsilon = \kappa(y + a)$.

Функция полной энергии балки имеет вид

$$\Pi(a, \kappa; M) = 2L \int_{-h}^h \Gamma(y) A(\kappa(y + a)) dy - L \int_0^{\kappa} M d\kappa.$$

По принципу Лагранжа уравнения статического равновесия определяются

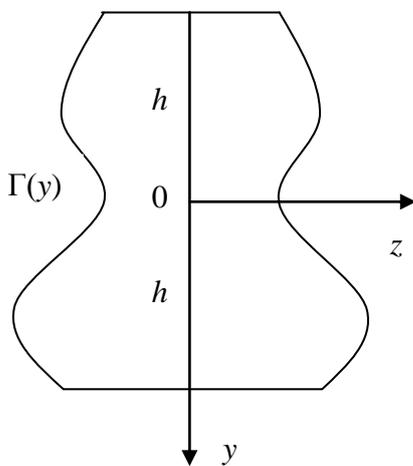


Рисунок 5 – Поперечное сечение балки

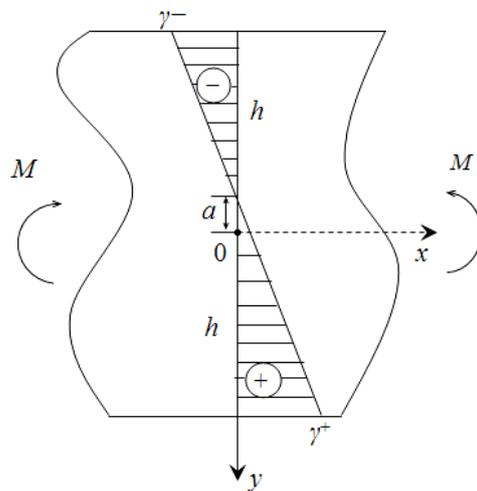


Рисунок 6 – Схема нагружения и распределение продольных деформаций

из равенств $\Pi_{,a} = 0$, $\Pi_{,\kappa} = 0$ и равны:

$$2 \int_{-h}^h \Gamma(y) \sigma(\kappa(y+a)) dy = 0, \quad 2 \int_{-h}^h \Gamma(y) \sigma(\kappa(y+a)) y dy - M = 0. \quad (9)$$

Для расчета параметров всех равновесий используется метод Ньютона-Канторовича. В отличие от случая прямоугольной балки параметру управления M здесь соответствует 2 параметра состояния балки (a и κ), поэтому решаются оба уравнения равновесия (9), представленные в виде операторного уравнения $\Phi(a, \kappa, M) = 0$, где $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)^T$ – векторный оператор, компоненты которого – левые части уравнений (9). Итерационная схема для некоторого приближения $x_n = (a_n, \kappa_n)$ к корню принимает вид

$$x_{n+1} = x_n - [\Phi'(x_n)]^{-1} \cdot [\Phi(x_n)],$$

где производная Φ' есть сильная производная функционала по Фреше, которая в данной задаче совпадает с матрицей Якоби оператора Φ

$$\Phi'(a, \kappa) = \begin{pmatrix} \Phi_{1,a} & \Phi_{1,\kappa} \\ \Phi_{2,a} & \Phi_{2,\kappa} \end{pmatrix}.$$

Для реализации итерационной процедуры Ньютона-Канторовича предлагается следующая методика выбора начального приближения к решению:

1. Задается изгибающий момент M .
2. Находится множество Λ вырожденных точек оператора Φ из условия: $\det \Phi' = 0$.
3. Плоскость параметров состояния Ω разбивается мелкой прямоугольной сеткой (Λ разделяет Ω на подобласти: устойчивости и неустойчивости).
4. Отображая узлы сетки посредством уравнений равновесия (9) в пространство управлений, выбирается тот узел, образ которого наиболее близок к заданной нагрузке M .

Для расчета равновесий рассматриваемых балок при чистом изгибе (мягкое и жесткое нагружения) применен метод простых итераций для решения уравнений (9), записанных для партипластического материала в виде

$$\begin{aligned} \kappa \Psi^{u1} + a \kappa \Psi^{u0} - R^\Phi &= 0, \\ \kappa \Psi^{u2} + a \kappa \Psi^{u1} - M^\Phi &= M. \end{aligned} \quad (10)$$

В системе уравнений (10) $R^\Phi = 2 \int_{-h}^h \Gamma(y) E^u \varepsilon^p dy$, $M^\Phi = 2 \int_{-h}^h \Gamma(y) E^u \varepsilon^p y dy$ – фиктивные растягивающее усилие и изгибающий момент, рассчитанные по величинам псевдонапряжений $E^u \varepsilon^p$, где $E^u = E^u(\kappa(y+a))$ и $\varepsilon^p = \varepsilon^p(\kappa(y+a))$. $\Psi^{u0} = 2 \int_{-h}^h \Gamma(y) E^u dy$, $\Psi^{u1} = 2 \int_{-h}^h \Gamma(y) E^u y dy$, и $\Psi^{u2} = 2 \int_{-h}^h \Gamma(y) E^u y^2 dy$ имеют смысл жесткостей балки относительно вертикальной оси симметрии нулевого, первого и второго порядков соответственно. Итерационная схема аналогична методу, изложенному в главе 2. Исследована сходимость метода и получены условия начала расходимости итерационного процесса. В случае балки из упругохрупкого мате-

риала в уравнениях (10) величины R^Φ и M^Φ равны нулю и $E^u = E^s$. Когда материал балки упругопластический, в уравнениях (10) E^u заменяется модулем Юнга.

Механический смысл схемы простых итераций заключается в разбиении исходной задачи на решение основной и ряда корректирующих задач (модификация метода упругих решений). Решение основной задачи для мягкого нагружения имеет вид

$$\kappa' = \frac{M}{\Psi^{u2} + a' \Psi^{u1}}, \quad a' = -\frac{\Psi^{u1}}{\Psi^{u0}}, \quad \varepsilon' = \kappa'(y + a'), \quad \sigma' = E^u \varepsilon'$$

и для жесткого нагружения

$$\varepsilon' = \kappa(y + a'), \quad \sigma' = E^u \varepsilon, \quad M' = \left(\Psi^{u2} \Psi^{u0} - (\Psi^{u1})^2 \right) \kappa.$$

Решение корректирующей задачи дают выражения

$$\kappa'' = \frac{M^\Phi}{\Psi^{u2} + a'' \Psi^{u1}}, \quad a'' = \frac{R^\Phi \left(\Psi^{u2} \Psi^{u0} - (\Psi^{u1})^2 \right)}{\Psi^{u0} \left(M^\Phi \Psi^{u0} - R^\Phi \Psi^{u1} \right)} - \frac{\Psi^{u1}}{\Psi^{u0}},$$

$$e' = \kappa''(y + a''), \quad \sigma'' = E^u (e' - \varepsilon^p),$$

для мягкого нагружения и

$$\kappa = 0, \quad e' = \frac{R^\Phi}{\Psi^{u0}}, \quad \sigma'' = \frac{E^u R^\Phi}{\Psi^{u0}} - E^u \varepsilon^p, \quad M'' = -M^\Phi$$

для жесткого нагружения. Итерационный процесс аналогичен процедуре, приведенной ранее для чистого изгиба прямоугольной балки.

Предложенные методы реализованы для расчета параметров всех равновесий тавровой (Г-образной) балки, подверженной чистому изгибу.

В заключении главы проводится исследование устойчивости процесса деформирования. Используя аппарат теории катастроф, установлено, что потеря устойчивости деформирования происходит тогда, когда вырождается матрица устойчивости (матрица Гессе потенциальной функции Π)

$$H = \begin{pmatrix} \Pi_{,aa} & \Pi_{,a\kappa} \\ \Pi_{,\kappa a} & \Pi_{,\kappa\kappa} \end{pmatrix}.$$

Отсюда критерий потери устойчивости имеет вид

$$4L^2 \kappa^2 \int_{-h}^h \Gamma(y) E^p(\kappa(y+a)) dy \cdot \int_{-h}^h \Gamma(y) E^p(\kappa(y+a)) y^2 dy -$$

$$- 4L^2 \kappa^2 \left(\int_{-h}^h \Gamma(y) E^p(\kappa(y+a)) y dy \right)^2 = 0. \quad (11)$$

Анализ устойчивости балок из пластичных и хрупких разупрочняющихся материалов проводится также посредством метода исследования устойчивости по линейному приближению. Выписываются уравнения возмущенного равновесия, используя уравнения (9), записанные для конкретного материала. Далее линеаризуются уравнения возмущенного равновесия, раскладывая в ряд Тейлора в точке равновесия нелинейные члены относительно параметров a и κ . Анализ уравнений линейного приближения на основании теоремы Адамара приводит к критерию

потери устойчивости (11). Установлено, что условие потери устойчивости чистого изгиба балки из разупрочняющегося материала совпадает с условием вырождения матрицы Якоби и с условием расходимости метода простых итераций.

В четвертой главе предложена методика расчета критической нагрузки балки произвольного поперечного сечения из разупрочняющегося материала при чистом изгибе. Методика основана на гипотезе Л.И. Седова, согласно которой разрушение есть явление того же порядка, что и невозможность равновесия. Условие потери устойчивости рассматривается как критерий разрушения.

Алгоритм расчета предельной несущей способности балок при чистом изгибе состоит из следующих этапов:

1. Задаются геометрические характеристики балочного элемента (высота, длина и функция, определяющая граничный контур поперечного сечения).
2. Определяется зависимость $\sigma(\varepsilon)$, характеризующая свойства материала.
3. Выписываются уравнения статического равновесия (9).
4. Находится функция касательного модуля E^P и выписывается условие потери устойчивости (11).
5. Находятся вырожденные критические точки – все пары параметров состояний (a, κ) , удовлетворяющие уравнению (11).
6. Из множества вырожденных критических точек выбираются параметры истинных, физически реализуемых, равновесий системы, то есть такие a и κ , для которых выполняется первое уравнение равновесия (10).
7. Подставляя полученные параметры a и κ во второе уравнение равновесия (9), находится искомая критическая нагрузка.

В качестве примера была рассчитана предельная несущая способность тавровой (Т-образной) балки с высотой $2h = 100$ мм, шириной $b = 20$ мм, шириной и высотой верхней полки $c = 60$ мм и $d = 20$ мм соответственно. Свойства материала при растяжении и при сжатии определяет функция $\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon \exp(-\varepsilon/\varepsilon^B)$, где $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\varepsilon^B = 0,01$. Рассчитанные предельные параметры и критический изгибающий момент тавровой балки равны $a^* = 17,644$ мм, $\kappa^* = 0,0002483$ мм⁻¹ и $M^* = 48,46$ кН·м. Результаты расчетов сравнивались с расчетом балки по методу теории неупругого изгиба, в соответствии с которым разрушение произойдет в крайних наиболее растянутых волокнах балки при достижении деформации предела прочности ε^B . В этом случае предельные параметры $\kappa_{[\sigma]} = 0,00015443$ мм⁻¹,

Таблица 1 – Значения предельного изгибающего момента, вычисленные по различным теориям

сечение	M^* , кН·м	$M_{[\sigma]}$, кН·м	Δ , %.
тавровое	48,46	43,8	11
треугольное	31,5	30,8	2
трапециевидное	55,9	54,8	2

$a_{[\sigma]} = 14,76$ мм и $M_{[\sigma]} = 43,79$ кН·м. Полученное значение изгибающего момента отличается от M^* на $\Delta = 11\%$.

В таблице 1 представлены также результаты расчетов треугольной балки с высотой $2h = 100$ мм, шириной основания $b = 50$ мм и граничным контуром $\Gamma(y) = b(y+h)/4h$ и трапециевидной балки с нижним основанием $b = 50$ мм, верхним основанием c

= 20 мм, высотой $2h = 100$ мм и граничным контуром $\Gamma(y) = [(b-c)y + (b+c)h]/4h$.

Для балок с тремя осями симметрии, у которых в процессе нагружения нейтральная плоскость совпадает с осью симметрии Ox и параметр $a = 0$, алгоритм расчета критической нагрузки заключается в следующем:

1. Задаются геометрические характеристики балочного элемента.
2. Определяется зависимость $\sigma(\varepsilon)$, характеризующую свойства материала.
3. Выписываются уравнения равновесия (9), в которых величина $a = 0$.
4. Находится функция касательного модуля E^P и выписывается условие потери устойчивости (11).
4. Уравнение (11) решается численно относительно кривизны κ .
5. Найденное значение κ подставляем во второе уравнение равновесия (9) и определяется критический изгибающий момент.

В качестве иллюстрации предложенной методики рассчитывался критический изгибающий момент для прямоугольной балки, рассмотренной в главе 2. В результате расчетов получаем $\kappa^* = 0,00029025 \text{ мм}^{-1}$ и $M^* = 85 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (соответствуют точке 2 на рисунке 3). Результаты расчетов сравнивались с расчетом предельной несущей способности балки, вычисленной по методу теории неупругого изгиба и равной $\kappa_{[\sigma]} = 0,0002 \text{ мм}^{-1}$ и $M_{[\sigma]} = 80,3 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (точка 1 на рисунке 3).

Таблица 2 – Значения предельного изгибающего момента, вычисленные по различным теориям

сечение	M^* , кН·м	$M_{[\sigma]}$, кН·м	Δ , %.
прямоугольное	85	80,3	6
круглое	55,86	50,8	9
двутаверное	87,83	85,1	3
ромбовидное	13,64	11,7	17

В таблице 2 приведены результаты расчетов прямоугольной балки, круглой с радиусом поперечного сечения $R = 50$ мм, двутаверной с высотой $2h = 100$ мм и шириной $b = 30$ мм, высотой и шириной полка $d = 15$ мм и $c = 40$ мм соответственно, и балки с поперечным сечением в виде ромба с диагоналями $h = 50$ мм и $b/2 = 25$ мм.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ И ВЫВОДЫ

1. Исследована устойчивость процесса деформирования при чистом изгибе балок с произвольными поперечными сечениями, симметричными относительно вертикальной оси, методами теории катастроф и методом анализа устойчивости по линейному приближению. Получены критерии потери устойчивости балок при чистом изгибе с учетом разупрочнения материала.

2. Приведена методика расчета параметров всех положений равновесия (устойчивых и неустойчивых) балок с произвольными поперечными сечениями, симметричными относительно вертикальной оси, из разупрочняющегося материала при чистом изгибе, основанная на применении метода Ньютона-Канторовича. Для реализации метода разработана процедура выбора начальных приближений, отвечающих числу решений уравнений равновесия.

3. Применен метод простых итераций, позволяющий определить параметры только устойчивых равновесий при чистом изгибе. Дана механическая интерпретация метода, представляющая собой один из вариантов метода упругих решений.

4. Показано, что начало расходимости метода простых итераций соответствует моменту потери устойчивости при чистом изгибе.

5. Разработана методика определения критической нагрузки и соответствующих параметров балок с произвольными поперечными сечениями, симметричными относительно вертикальной оси, из разупрочняющихся материалов при чистом изгибе. Численные эксперименты подтвердили, что предложенная методика уточняет критическую нагрузку, рассчитанную методами теории неупругого изгиба, за счет введения закритической стадии деформирования. Отмечено, что напряжения и деформации, которые отвечают критическому моменту, вычисленному предложенной методикой, лежат на падающей ветви полной диаграммы деформирования.

Предложенная методика прогнозирования предельной несущей способности может быть использована в процессе проектирования элементов конструкций и деталей машин в качестве руководства и практического пособия для оценки прочности и надежности балок, материал которых обладает эффектом деформационного разупрочнения в процессе деформирования, при чистом изгибе.

Результаты исследований могут лечь в основу дальнейшего развития теории разупрочняющихся материалов и разработки методов расчета различных конструкций, которые вследствие учета разупрочнения позволяют полностью использовать ресурс материала.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, рекомендуемых ВАК:

1. Стружанов, В. В. Итерационные процедуры расчета параметров равновесия и устойчивость чистого изгиба балок из пластичных и хрупких разупрочняющихся материалов [Текст] / В. В. Стружанов, Е. А. Бахарева // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2010. – № 1 (20). – С. 84-95.

2. Бахарева, Е. А. Итерационный метод расчета параметров равновесия при чистом изгибе балки симметричного относительно продольной оси сечения из материала с падающей диаграммой [Текст] / Е. А. Бахарева // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 4, ч. 4. – С. 1394-1395.

3. Бахарева, Е. А. Энергетический критерий устойчивости процесса чистого изгиба балки из упругохрупкого материала [Текст] / Е. А. Бахарева, В. В. Стружанов // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре гос. техн. ун-та. Сер. Науки о Земле. – 2012. – № I-1 (9). – С. 11-14.

4. Стружанов, В. В. Математические методы в теории чистого изгиба прямоугольных балок из разупрочняющегося материала с симметричной диаграммой растяжения-сжатия [Текст] / В. В. Стружанов, Е. А. Бахарева // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 158-167.

5. Стружанов, В. В. К расчету предельных нагрузок балочных элементов при чистом изгибе [Текст] / В. В. Стружанов, Е. А. Бахарева // Транспорт Урала. – 2013. – № 3 (38). – С. 24-27.

Сборники статей, труды конференций и тезисы докладов:

1. Бахарева, Е. А. Определение параметров равновесия при чистом изгибе балки из нелинейного материала одним итерационным методом [Текст] / Е. А. Бахарева, В. В. Стружанов // Шестая Всеросс. научн. конф. с междунар. участием «Математическое моделирование и краевые задачи»: труды конф. – Самара: СамГТУ. – 2009. – Ч. 1. – С. 41-47.

2. Бахарева, Е. А. Численное исследование параметров закритического деформирования материала на внезапное разрушение балки [Текст] / Е. А. Бахарева, В. В. Стружанов // III Всеросс. конф. «Безопасность критичных инфраструктур и территорий»: материалы конф. – Екатеринбург: УрО РАН. – 2009. – С. 113.

3. Бахарева, Е. А. Метод расчета предельной нагрузки при чистом изгибе балки прямоугольного сечения [Текст] / Е. А. Бахарева, В. В. Стружанов // Седьмая Всеросс. науч. конф. с междунар. участием «Математическое моделирование и краевые задачи»: труды конф. – Самара: СамГТУ. – 2010. – Ч. 1. – С. 51-54.

4. Бахарева, Е. А. Метод Ньютона в задаче определения положений равновесия балки из разупрочняющегося материала при чистом изгибе [Текст] / Е. А. Бахарева, В. В. Стружанов // VI Междунар. научн. конф. «Прочность и разрушение материалов и конструкций»: материалы конф. – Оренбург: ОГУ. – 2010. – С. 135-140.

5. Бахарева, Е. А. Энергетический критерий устойчивости процесса чистого изгиба балки из пластичного материала [Текст] / Е. А. Бахарева, В. В. Стружанов // Вторая Всеросс. конф «Проблемы оптимального проектирования сооружений»: доклады конф. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин). – 2011. – С. 53-59.

6. Стружанов, В. В. Расчет параметров равновесия методом Ньютона-Канторовича при чистом изгибе и растяжении балки прямоугольного сечения из материала с падающей диаграммой [Электронный ресурс] / В. В. Стружанов, Е. А. Бахарева // Междунар. конф. «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика»: труды конф. – № гос. регистр. 0321101160, ФГУП НТЦ "Информрегистр". – Новосибирск. – 2011. – Режим доступа: <http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik90/fulltext/38808/49551/Struzhanov.pdf>.

7. Бахарева, Е. А. Метод простой итерации в задаче о чистом изгибе балки из материала с падающей диаграммой [Текст] / Е. А. Бахарева, В. В. Стружанов // Восьмая Всеросс. науч. конф. с междунар. участием «Математическое моделирование и краевые задачи»: труды конф. – Самара: СамГТУ. – 2011. – Ч. 1. – С. 29-35.

8. Бахарева, Е. А. Расчет параметров равновесия балки из разупрочняющегося материала при ее чистом изгибе и растяжении методом Ньютона-Канторовича [Текст] / Е. А. Бахарева, В. В. Стружанов // XV Междунар. конф. «Современные

проблемы механики сплошной среды»: труды докладов. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. – 2011. – С. 27-31.

9. Бахарева, Е. А. Устойчивость по линейному приближению процесса чистого изгиба балки из разупрочняющегося материала [Текст] / Е. А. Бахарева, В. В. Стружанов // Математические методы исследования технических и экономических систем: сб. научн. тр. – Екатеринбург: Изд-во УрГУПС. – 2011. – Вып. 98 (181). – С. 45-52.

10. Бахарева, Е. А. Определение предельных параметров нагружения балки из разупрочняющегося материала при чистом изгибе и растяжении [Текст] / Е. А. Бахарева, В. В. Стружанов // Междунар. научн. конф. по механике «Шестые Поляховские чтения»: тезисы докладов. – Санкт-Петербург. – 2012. – С. 210.

11. Бахарева, Е. А. Расчет предельных нагрузок балочных элементов конструкций из нелинейного материала при чистом изгибе и растяжении по критерию устойчивости [Текст] / Е. А. Бахарева, В. В. Стружанов // XX Петербургские чтения по проблемам прочности: сборник материалов. – Санкт-Петербург. – 2012. – Ч. 2. – С. 67-69.

12. Бахарева, Е. А. Устойчивость по первому приближению в задаче о чистом изгибе прямоугольной балки из материала с падающей диаграммой [Текст] / Е. А. Бахарева, В. В. Стружанов / Е. А. Бахарева, В. В. Стружанов // Третья Междунар. конф. «Математическая физика и ее приложения»: материалы конф. – Самара: СамГТУ. – 2012. – С. 50-51.

13. Бахарева, Е. А. Устойчивость по линейному приближению в задаче о чистом изгибе и растяжении балочного элемента конструкции из нелинейного материала [Текст] / Е. А. Бахарева, В. В. Стружанов // XI молодежная научная школа-конференция «Лобачевские чтения»: материалы конф. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва. – 2012. – Т. 45. – С. 14-16.

14. Бахарева, Е. А. Расчет предельных нагрузок прямоугольных и двутавровых балок из разупрочняющегося материала при чистом изгибе и растяжении по критерию устойчивости [Текст] / Е. А. Бахарева, В. В. Стружанов // Математические методы и модели в теоретических и прикладных исследованиях: сборник научных трудов. – Екатеринбург: Изд-во УрГУПС. – 2012. – Вып. 4 (187). – С. 6-15.

15. Бахарева, Е. А. Расчет предельного изгибающего момента при чистом изгибе балок из разупрочняющегося материала с симметричной диаграммой деформирования [Текст] / Е. А. Бахарева, В. В. Стружанов // Девятой Всеросс. науч. конф. с междунар. участием «Математическое моделирование и краевые задачи»: Труды конф. – Самара: СамГТУ. – 2013. – С. 36-41.

16. Бахарева, Е. А. Особенности потенциальной функции в задаче о чистом изгибе балок из нелинейного материала [Текст] / Е. А. Бахарева, В. В. Стружанов // XI Междунар. Казанская летняя научная школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы»: материалы конф. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, Изд-во КФУ. – 2013. – Т. 46. – С. 121-122.

17. Стружанов, В. В. Неустойчивые состояния материала и сопутствующие математические проблемы [Текст] / В. В. Стружанов, Е. А. Бахарева // Междунар. научн. конф. «Современные проблемы математики, механики, информатики»: материалы конф. – Тула: Изд-во ТулГУ. – 2013. – С. 469-470.

Формат 60x84 1/16
Бумага писчая. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Центр оперативной полиграфии «Копирус»
620075, г. Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, 137